



**HAL**  
open science

## Intégrales de chemin et fentes de Young

F. Gimbert

► **To cite this version:**

| F. Gimbert. Intégrales de chemin et fentes de Young. 2005, pp.1-45. in2p3-00024776

**HAL Id: in2p3-00024776**

**<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00024776>**

Submitted on 30 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire de Physique Corpusculaire  
de Clermont-Ferrand

# Rapport JANUS

## *Intégrales de Chemin et Fentes d'Young*

par

**Florian GIMBERT**

*Responsable de stage :*  
Vincent Morénas

Juillet 2005



# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Madame FONVIEILLE pour m'avoir permis de réaliser ce stage et pour sa gentillesse ainsi que Mr MORENAS qui a toujours été là pour répondre à mes questions et me guider dans mes recherches. Je remercie enfin Mr ORLOFF pour ses interventions toujours bénéfiques et intéressantes pour mon travail et Benjamin LABONNE pour avoir partagé son bureau et m'avoir donné de bons conseils pour mon orientation future.



# Objectif du stage

L'objectif de ce stage est de se familiariser avec une formulation de la mécanique quantique autre que la formulation opératorielle. En effet la mécanique quantique non relativiste est surtout enseignée à travers l'utilisation d'opérateurs et de l'étude de leur spectre. Une autre formulation existe qui utilise les intégrales de chemin principalement développées par Feynman.

Dans un premier temps, il est proposé d'apprendre à manipuler ce type de formalisme. Puis, dans un deuxième temps, une application pourra déboucher sur l'étude du phénomène de diffraction par deux fentes d'Young (utilisation de l'outil informatique). Enfin il serait intéressant de terminer par l'interprétation de Bohm de la mécanique quantique.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Présentation des Intégrales de chemin</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Les concepts fondamentaux de la mécanique quantique</b>	<b>9</b>
1.1	Introduction . . . . .	9
1.2	Une expérience capitale . . . . .	9
1.3	La probabilité d'amplitude . . . . .	10
1.4	L'équation de Schrödinger . . . . .	11
1.4.1	Notion d'opérateurs . . . . .	11
1.4.2	Rapprochement entre opérateurs et observations . . . . .	11
1.4.3	Enoncé des postulats . . . . .	11
1.4.4	Choix des opérateurs . . . . .	12
1.4.5	Etablissement de l'équation de Schrödinger . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Les Intégrales de Chemin</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	L'action classique . . . . .	15
2.3	L'amplitude en mécanique quantique . . . . .	16
2.4	La somme des chemins . . . . .	16
2.4.1	Analogie avec les intégrales de Riemann . . . . .	16
2.4.2	Calcul de la somme . . . . .	17
2.4.3	L'intégrale de chemin . . . . .	17
2.5	Plusieurs événements successifs . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Utilisation du concept avec des exemples</b>	<b>19</b>
3.1	La particule libre . . . . .	19
3.2	Diffraction à travers une fente . . . . .	20
3.2.1	Présentation de l'expérience . . . . .	20
3.2.2	La fente gaussienne . . . . .	20
3.3	Les intégrales de Gauss . . . . .	21
3.4	Système à plusieurs coordonnées . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Étude de l'expérience des fentes d'Young</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Résolution par l'optique physique</b>	<b>25</b>
4.1	Théorie de Kirchoff de la diffraction . . . . .	25
4.1.1	Théorème de Green . . . . .	25
4.1.2	Intégrale de Kirchoff . . . . .	25
4.1.3	Étude d'un exemple . . . . .	26
4.1.4	Approximation paraxiale . . . . .	27
4.2	Diffraction de Fraunhofer . . . . .	28
4.3	Applications aux fentes de Young . . . . .	29
4.3.1	Avec une fente normale . . . . .	29



4.3.2	Avec une fente gaussienne . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Résolution par les intégrales de chemin</b>	<b>33</b>
5.1	Définition des kernels . . . . .	33
5.2	Avec une fente gaussienne . . . . .	34
5.3	Avec une fente normale . . . . .	35
5.4	Conclusion . . . . .	36
<b>III</b>	<b>L'interprétation de la mécanique quantique de Bohm</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Présentation de la théorie de Bohm</b>	<b>39</b>
6.1	Introduction . . . . .	39
6.2	Nouvelle interprétation de l'équation de Schrödinger . . . . .	39
6.3	Application aux fentes de Young . . . . .	41

Première partie

**Présentation des Intégrales de chemin**



# Chapitre 1

## Les concepts fondamentaux de la mécanique quantique

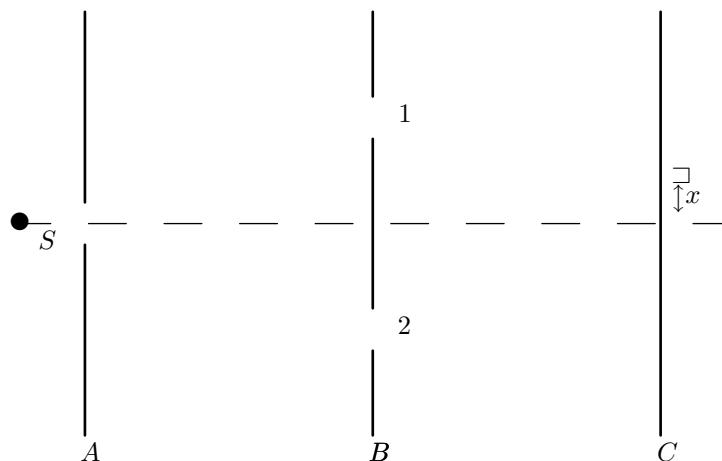
### 1.1 Introduction

Au début du XX siècle les physiciens observèrent des phénomènes étranges non expliqués par la physique classique. La nécessité d'une structure théorique pour ces nouveaux phénomènes se fit clairement sentir avec la controverse sur la nature de la lumière et des électrons. En effet ces derniers se comportaient tantôt comme des ondes, tantôt comme des particules. Ce problème fut entièrement résolu en 1926-27 dans une théorie qui fut appelée mécanique quantique. Cette nouvelle théorie permit de découvrir que les lois de probabilités en mécanique quantique différaient des lois classiques de Laplace. Les lois de la mécanique quantique approchent celles de Laplace si la taille des objets étudiés dans les expériences augmente. Le comportement de l'électron ou de la lumière est régi par de nouvelles lois.

### 1.2 Une expérience capitale

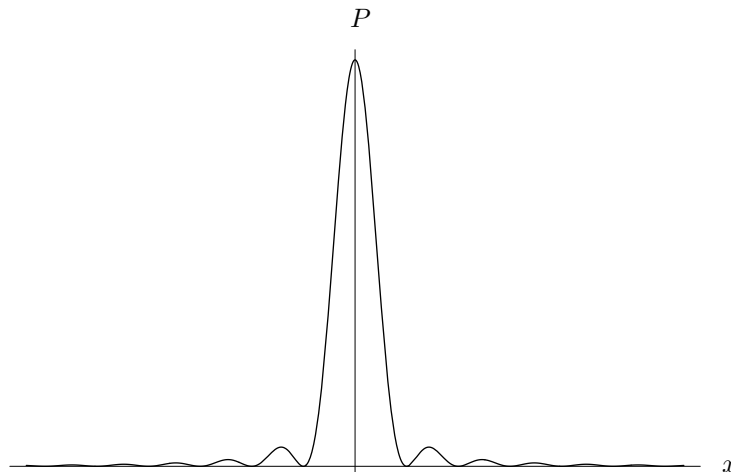
Le concept de probabilité n'est pas changé en mécanique quantique. Quand nous parlons de la probabilité de réalisation d'un évènement  $p$ , nous utilisons la définition classique, i.e., que si l'expérience est répétée plusieurs fois, nous espérons que la fraction qui donne la réussite de l'expérience est égale environ à  $p$ . Par contre, ce qui change, c'est la méthode de calcul des probabilités. L'effet de ce changement est plus important avec des objets de la dimension de l'atome. Pour illustrer ces lois de la mécanique quantique, nous allons décrire une expérience qui utilise un simple électron.

Notre expérience est illustrée par la figure suivante. En  $A$  nous avons une source  $S$  d'électrons qui ont tous la même énergie et partent dans toutes les directions pour rencontrer l'écran  $B$ . L'écran  $B$  a deux trous, 1 et 2, à travers lesquels les électrons peuvent passer. Enfin, au plan  $C$ , nous avons un détecteur d'électrons qui peut être placé à une distance  $x$  variable du centre de l'écran.



Si le détecteur est extrêmement sensible (comme un compteur Geiger), il relèvera que le taux arrivant en  $x$  n'est pas continu mais correspond à une pluie de particules. Si l'intensité de la source est très basse, le détecteur enregistrera des impulsions représentant l'arrivée de particules individuelles, séparées par des intervalles de temps. C'est la raison qui permet de dire que les électrons sont des particules.

Nous mesurons pour les différentes positions  $x$  du détecteur le nombre de pulsations par seconde, i.e., nous déterminons expérimentalement la probabilité  $P$  que l'électron arrive au point  $x$ . Le graphe de cette fonction de  $x$  est une courbe compliquée comme l'illustre la figure suivante



Il y a plusieurs maxima et minima et il y a des endroits près du centre de l'écran où les électrons arrivent difficilement. Ces différentes constatations sont en désaccord avec le fait que les électrons soient des particules. En effet nous avons d'abord supposé que, si les électrons se comportent comme des particules,

1. Chaque électron qui va de  $S$  à  $x$  passe par l'un des deux trous.
2. La probabilité d'arriver en  $x$  est la somme de la probabilité  $P_1$  d'arrivée en  $x$  en ayant traversé le trou 1 plus la probabilité  $P_2$  d'arriver en ayant traversé le trou 2.

Nous aurions dû trouver ceci par l'expérience directe. Chacune des probabilités est facile à calculer. Nous fermons d'abord le trou 2 et mesurons la probabilité  $P_1$  d'arriver en  $x$  avec seulement le trou 1 d'ouvert. Ensuite nous faisons la même chose pour le trou 2 et nous calculons  $P_2$ . La somme des deux n'est pas égale au résultat expérimental. En conclusion, l'expérience nous dit soit que  $P \neq P_1 + P_2$ , soit que notre deuxième hypothèse est fausse.

### 1.3 La probabilité d'amplitude

La probabilité d'arriver en  $x$  avec les deux trous ouverts n'est pas la somme de la probabilité avec le trou 1 ouvert plus celle avec le trou 2 ouvert. En fait la courbe  $P(x)$  est connue : il s'agit de la même courbe que celle de la diffraction d'une onde par deux fentes. Le plus facile pour représenter des amplitudes d'onde est d'utiliser les nombres complexes. Nous pouvons énoncer la loi pour  $P(x)$  en disant que  $P(x)$  est la valeur absolue au carré d'une certaine quantité complexe  $\phi(x)$  qu'on appelle amplitude de probabilité d'arriver en  $x$ . De plus  $\phi(x)$  est la somme de deux contributions :  $\phi_1$ , l'amplitude d'arriver à travers le trou 1 plus  $\phi_2$  l'amplitude d'arriver à travers le trou 2. En d'autres termes, nous avons les nombres complexes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  tels que

$$P = |\phi|^2 \quad (1.1)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (1.2)$$

$$P_1 = |\phi_1|^2 \quad (1.3)$$

$$P_2 = |\phi_2|^2 \quad (1.4)$$

## 1.4 L'équation de Schrödinger

### 1.4.1 Notion d'opérateurs

Considérons la fonction  $\partial\psi/\partial t$ , dérivée de  $\psi$  par rapport à  $t$ . Nous pouvons dire que l'opérateur  $\partial/\partial t$  agissant sur la fonction  $\psi$  donne la fonction  $\partial\psi/\partial t$ . De façon générale, si une certaine opération permet de faire correspondre à chaque fonction  $\psi$  une et une seule fonction  $\psi'$ , nous disons que  $\psi'$  est la fonction obtenue en faisant agir un certain opérateur  $\hat{A}$  sur  $\psi$ . Nous écrivons alors

$$\psi' = \hat{A}\psi \quad (1.5)$$

A chaque opérateur  $\hat{A}$  correspond un ensemble de nombres  $a_n$  et un ensemble de fonctions  $\psi_n(x)$  définies par l'équation

$$\hat{A}\psi_n(x) = a_n\psi_n(x) \quad (1.6)$$

avec

$\psi_n(x)$  : fonction propre de l'opérateur  $\hat{A}$

$a_n$  : valeur propre de l'opérateur  $\hat{A}$

Ceci est l'équation aux valeurs propres de l'opérateur  $\hat{A}$ .

Nous disons que deux opérateurs commutent si nous avons la propriété  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ . Nous écrivons alors  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ .

Un opérateur  $\hat{A}$  est dit hermitique sur un ensemble de fonctions si, quelles que soient deux fonctions  $\psi_1(x)$  et  $\psi_2(x)$  de cet ensemble, la relation suivante est vérifiée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(\hat{A}\psi_2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{A}\psi_1)^*\psi_2dx \quad (1.7)$$

De plus nous pouvons vérifier facilement que les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles.

### 1.4.2 Rapprochement entre opérateurs et observations

En physique quantique, concernant la mesure d'une grandeur, nous parlons d'observation de la grandeur. La grandeur soumise à l'observation est appelée observable. L'observation d'une grandeur physique perturbe le système d'où la notion de grandeurs compatibles et de grandeurs incompatibles.

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux types d'observation :

$\rightsquigarrow$  si  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ , alors les deux grandeurs sont compatibles.

$\rightsquigarrow$  si  $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$ , alors les deux grandeurs sont incompatibles.

Il apparaît une certaine ressemblance entre les propriétés des observations et les propriétés des opérateurs. Nous ferons ainsi les rapprochements suivants :

opérateur	$\longleftrightarrow$	observation
valeur propre	$\longleftrightarrow$	résultat possible des mesures
fonction propre	$\longleftrightarrow$	état du système
commutateur nul	$\longleftrightarrow$	grandeurs compatibles
commutateur non-nul	$\longleftrightarrow$	grandeurs incompatibles

### 1.4.3 Énoncé des postulats

Premier postulat

La mécanique classique est un cas limite de la mécanique quantique.

Deuxième postulat

L'état d'un système observé est représenté par une fonction dite fonction d'état ou fonction d'onde.

Troisième postulat

Les observations sont représentées par des opérateurs hermitiques.

Quatrième postulat

Les résultats possibles d'une observation sont fournis par les valeurs propres  $a_n$  de l'opérateur  $\hat{A}$  associé à l'observation.

Cinquième postulat

Lorsque le système n'est pas dans un état propre, nous pouvons obtenir la valeur moyenne des résultats  $\bar{a}$  pour un ensemble d'observations par

$$\bar{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) \hat{A} \phi(x, t) dx \quad (1.8)$$

#### 1.4.4 Choix des opérateurs

Le principe de correspondance fait correspondre des opérateurs aux grandeurs physiques. Les opérateurs choisis doivent conduire à des conclusions intéressantes physiquement.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \hat{x} = x \\ V(\vec{r}) &\rightarrow \hat{V}(\vec{r}) \\ E &\rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ p_x &\rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ p_y &\rightarrow \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ p_z &\rightarrow \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{p} &\rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\text{grad}} \\ p_x^2 &\rightarrow \hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ p_y^2 &\rightarrow \hat{p}_y^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ p_z^2 &\rightarrow \hat{p}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ p^2 &\rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta \end{aligned}$$

#### 1.4.5 Etablissement de l'équation de Schrödinger

Pour une particule donnée, nous avons la relation

$$E_c + V = E \quad (1.9)$$

avec  $E$  constante. Nous pouvons aussi écrire

$$\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = E \quad (1.10)$$

Nous transposons cette équation dans le domaine des opérateurs.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{r}) \right) \phi(\vec{r}, t) &= \hat{E} \phi(\vec{r}, t) \\ \Leftrightarrow \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \phi(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nous définissons l'opérateur hamiltonien  $\hat{H}$  par  $\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})$ . L'équation aux valeurs propres de cet opérateur est

$$\hat{H} \psi(x) = E \psi(x) \quad (1.12)$$

Cet opérateur est linéaire et hermitique.

Pour les états stationnaires, nous avons  $\phi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})f(t)$ .

Nous trouvons ainsi l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (1.13)$$

Comme nous considérons des particules libres ( $V = 0$ ), nous pouvons réécrire l'équation précédente qui sera appelée équation de Helmholtz :

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0 \quad (1.14)$$





# Chapitre 2

## Les Intégrales de Chemin

### 2.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'à chaque trajectoire d'une particule est associée une amplitude spécifique qu'il nous faut déterminer. Pour plus de simplicité, nous considérerons des particules se déplaçant dans une seule dimension. La position sera spécifiée par la coordonnée  $x$  en fonction du temps  $t$ . Nous définirons ainsi chemin la fonction  $x(t)$  telle que si une particule part du point  $x_a$  à l'instant  $t_a$  et arrive au point  $x_b$  à l'instant  $t_b$ , nous aurons  $x(t_a) = x_a$  et  $x(t_b) = x_b$ .

En mécanique quantique, l'amplitude pour aller du point  $a$  au point  $b$  est souvent appelée kernel et notée  $K(b, a)$ . Et cette amplitude sera la somme de toutes les trajectoires possibles pour aller du point  $a$  au point  $b$ , à la différence de la mécanique classique où il n'y a qu'une seule trajectoire de  $a$  à  $b$ , que nous noterons  $\bar{x}(t)$ . Avant d'étudier le cas de la mécanique quantique, revenons d'abord à la situation classique.

### 2.2 L'action classique

Une des méthodes les plus simples pour déterminer le chemin  $\bar{x}(t)$  parmi les autres chemins possibles est d'utiliser le principe de moindre action. Il existe une variable  $S$  spécifique à chaque chemin et pour le chemin classique  $\bar{x}(t)$   $S$  est minimum. Réellement  $S$  doit être un extremum. Cela signifie que la valeur de  $S$  reste constante si le chemin  $\bar{x}(t)$  change légèrement.

$S$  est donnée par l'expression

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt \quad (2.1)$$

où  $L$  représente le lagrangien du système. Pour une particule de masse  $m$  avec une énergie potentielle  $V(x, t)$ , le lagrangien est

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \quad (2.2)$$

La forme du chemin  $\bar{x}(t)$  est déterminée par le calcul des variations. Supposons que le chemin varie de  $\delta x(t)$  autour de  $\bar{x}(t)$ . Avec la condition que les points extrêmes soient fixes, nous avons

$$\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0 \quad (2.3)$$

La condition que  $\bar{x}(t)$  soit un extremum de  $S$  signifie que, au premier ordre en  $\delta x$

$$\delta S = S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] = 0 \quad (2.4)$$

D'après (2.1), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} S[x + \delta x] &= \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x} + \delta \dot{x}, x + \delta x, t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ L(\dot{x}, x, t) + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \\ &= S[x] + \int_{t_a}^{t_b} \left( \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

Après une intégration par partie, la variation  $\delta S$  devient

$$\delta S = \left[ \delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta x \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \quad (2.6)$$

Comme  $\delta x$  est nulle aux points  $a$  et  $b$ , le premier terme du deuxième membre est égal à 0. De plus  $\delta x$  peut prendre n'importe quelle valeur entre  $x_a$  et  $x_b$ . L'équation (2.4) est donc satisfaite si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Cette égalité représente l'équation lagrangienne du mouvement.

En mécanique quantique la forme de  $S$  et la valeur extrême  $S_{cl}$  de  $S$  sont importantes. Examinons deux exemples pour calculer l'extremum de  $S$ .

Pour une particule libre  $L = m\dot{x}^2/2$  l'action  $S_{cl}$  correspondant au mouvement classique d'une particule est donnée par

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (2.8)$$

Pour un oscillateur harmonique, nous avons  $L = (\frac{m}{2})(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ . D'où, avec  $T$  égal à  $t_b - t_a$ , l'action classique vaut

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b] \quad (2.9)$$

Pour trouver ces deux résultats, il faut remplacer le lagrangien par sa valeur dans l'équation (2.7) et calculer  $x$ . Il suffit ensuite d'intégrer le lagrangien pour obtenir l'action classique.

## 2.3 L'amplitude en mécanique quantique

Maintenant nous devons savoir comment chaque trajectoire contribue à l'amplitude totale pour aller de  $a$  à  $b$ . En mécanique quantique, ce n'est pas seulement le chemin pour lequel l'action est maximale qui est important mais tous les chemins possibles. Ils contribuent de façon égale à l'amplitude totale mais avec des phases différentes. La probabilité  $P(b, a)$  d'aller du point  $x_a$  à l'instant  $t_a$  au point  $x_b$  à l'instant  $t_b$  est la valeur absolue au carré  $P(b, a) = |K(b, a)|^2$  d'une amplitude  $K(b, a)$  pour aller de  $a$  à  $b$ . Cette amplitude est la somme des contributions de chaque chemin.

$$K(b, a) = \sum_{\text{sur tous les chemins de } a \text{ à } b} \phi[x(t)] \quad (2.10)$$

La contribution de chaque chemin possède une phase proportionnelle à l'action  $S$  :

$$\phi[x(t)] = \text{const } e^{(i/\hbar)S[x(t)]} \quad (2.11)$$

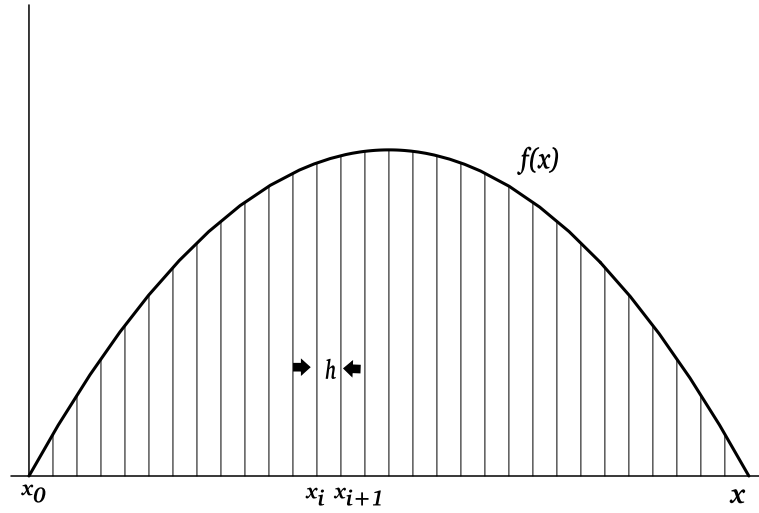
## 2.4 La somme des chemins

### 2.4.1 Analogie avec les intégrales de Riemann

Revenons d'abord à la définition des intégrales de Riemann. Nous pouvons dire que l'aire  $A$ , sous la courbe, est la somme de toutes les ordonnées, ou même proportionnelle à cette somme. En prenant un sous-ensemble de ces ordonnées, par exemple espacées de  $h$ , et, en les ajoutant, nous obtenons :

$$A \sim \sum_i f(x_i) \quad (2.12)$$

où la sommation se fait sur un ensemble fini de points  $x_i$ , comme le montre la figure ci-après :



L'étape suivante consiste à définir  $A$  comme la limite de cette somme. Nous pouvons passer à la limite en prenant des valeurs de  $h$  de plus en plus petites. En procédant ainsi nous obtenons une somme différente pour chaque valeur de  $h$  et donc aucune limite existe. Nous devons donc définir un facteur normalisé qui dépendra de  $h$ . Pour une intégrale de Riemann, ce facteur est tout simplement  $h$  lui-même. Maintenant la limite existe et nous pouvons écrire :

$$A = \lim \left[ h \sum_i f(x_i) \right] \quad (2.13)$$

### 2.4.2 Calcul de la somme

Nous pouvons appliquer une procédure analogue à la somme sur tous les chemins. Tout d'abord nous devons choisir un sous-ensemble à tous les chemins. Pour cela nous divisons le temps en intervalles de largeur  $\epsilon$ . Nous obtenons ainsi un ensemble de valeurs  $t_i$  espacées de  $\epsilon$  entre  $t_a$  et  $t_b$ . A chaque instant  $t_i$  correspond le point  $x_i$ . Nous construisons un chemin en reliant tous les points par des segments. Il est possible de définir une somme sur tous les chemins construits de cette manière en prenant une intégrale multiple sur toutes les valeurs de  $x_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $N - 1$ , avec

$$N\epsilon = t_b - t_a \quad (2.14)$$

$$\epsilon = t_{i+1} - t_i \quad (2.15)$$

$$t_0 = t_a \quad t_N = t_b \quad (2.16)$$

$$x_0 = x_a \quad x_N = x_b \quad (2.17)$$

Finalement le résultat est

$$K(b, a) \sim \iint \dots \int \phi[x(t)] dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \quad (2.18)$$

Nous n'intégrons pas sur  $x_0$  et  $x_N$  car ce sont les points fixes  $x_a$  et  $x_b$ . Cette équation correspond à l'équation (2.12). Pour définir le facteur normalisé  $A$ , nous prenons le cas d'une particule libre et nous avons

$$A = \left( \frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

Nous verrons plus tard comment ce résultat est obtenu. Avec le facteur, la limite existe et nous pouvons écrire

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint \dots \int e^{(i/\hbar)S[b,a]} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_{N-1}}{A} \quad (2.20)$$

où

$$S[b, a] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt$$

### 2.4.3 L'intégrale de chemin

Nous pouvons écrire la somme sur tous les chemins possibles avec une notation plus courte telle que

$$K(b, a) = \int_a^b e^{(i/\hbar)S[b,a]} \mathcal{D}x(t) \quad (2.21)$$

que nous appellerons intégrale de chemin. Nous retournerons rarement à la forme de l'équation (2.20).

## 2.5 Plusieurs événements successifs

Dans cette partie, nous allons exposer une importante loi pour la composition d'événements successifs dans le temps. Supposons  $t_c$  un instant entre  $t_a$  et  $t_b$ . Alors l'action le long d'un chemin entre  $a$  et  $b$  peut s'écrire

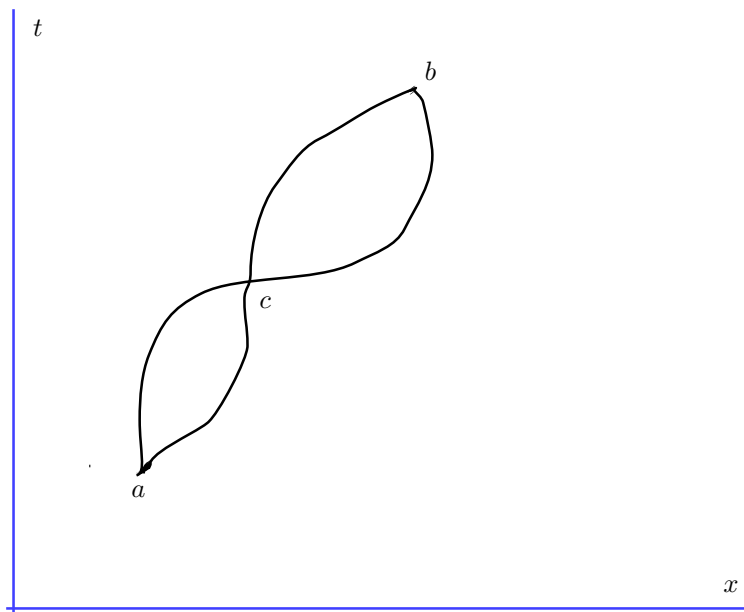
$$S[b, a] = S[b, c] + S[c, a]$$

En utilisant l'équation (2.21) pour définir le kernel, nous pouvons écrire

$$K(b, a) = \int e^{(i/\hbar)S[b,c] + (i/\hbar)S[c,a]} \mathcal{D}x(t) \quad (2.22)$$

Il est possible de diviser ce chemin en deux parties. La première partie aurait comme points extrêmes  $x_a$  et  $x_c = x(t_c)$  et la seconde partie  $x_c$  et  $x_b$ , comme le montre la figure suivante. Nous pouvons intégrer sur tous les chemins de  $a$  à  $c$  et aussi de  $c$  à  $b$ , puis finalement intégrer sur tous les  $x_c$  possibles. Nous obtenons alors

$$K(b, a) = \int_{x_c} K(b, c)K(c, a) dx_c \quad (2.23)$$



Ce résultat peut être résumé de la manière suivante. Le kernel d'une particule allant de  $a$  à  $b$  peut être trouvé selon les règles

1. Le kernel pour aller de  $a$  à  $b$  est la somme, sur toutes les valeurs possibles de  $x_c$  des amplitudes, pour aller de  $a$  à  $c$  puis de  $c$  à  $b$ .
2. L'amplitude pour aller de  $a$  à  $c$  puis de  $c$  à  $b$  est le kernel pour aller de  $a$  à  $c$  fois le kernel pour aller de  $c$  à  $b$ .

Ainsi nous avons la règle : Les amplitudes pour des événements se succédant dans le temps se multiplient.

# Chapitre 3

## Utilisation du concept avec des exemples

### 3.1 La particule libre

La méthode utilisée au chapitre 2 pour décrire une somme sur tous les chemins peut être utilisée pour calculer le kernel d'une particule libre. Le lagrangien pour une particule libre est

$$L = m \frac{\dot{x}^2}{2}$$

Avec l'aide des équations (2.19) et (2.20) le kernel pour une particule libre est

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \cdots \int \exp \left[ \frac{im}{2\hbar\epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right] dx_1 \cdots dx_{N-1} \left( \frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m} \right)^{-N/2} \quad (3.1)$$

Ceci représente un ensemble d'intégrales gaussiennes, i.e., des intégrales de la forme  $\int [\exp(-ax^2)] dx$  ou  $\int [\exp(-ax^2 + bx)] dx$ . Comme l'intégrale d'une fonction de Gauss est encore une fonction de Gauss, nous pouvons intégrer une variable après l'autre. Après avoir intégré, nous pouvons prendre la limite et nous obtenons le résultat suivant :

$$K(b, a) = \left[ \frac{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}{m} \right]^{-1/2} \exp \left[ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right] \quad (3.2)$$

Le calcul se fait de la manière suivante. Notons d'abord que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m} \right)^{-2/2} \exp \left\{ \frac{m}{2i\hbar\epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right\} dx_1 = \left( \frac{2\pi i\hbar(2\epsilon)}{m} \right)^{-1/2} \exp \left[ \frac{m}{2i\hbar(2\epsilon)} (x_2 - x_0)^2 \right] \quad (3.3)$$

Maintenant multiplions ce résultat par

$$\left( \frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left[ \frac{m}{2i\hbar\epsilon} (x_3 - x_2)^2 \right] \quad (3.4)$$

et intégrons cette fois sur  $x_2$ . Le résultat est similaire à celui de l'équation (3.3), à l'exception de  $(x_2 - x_0)^2$  qui devient  $(x_3 - x_0)^2$  et du coefficient  $(2\epsilon)$  qui est remplacé par  $(3\epsilon)$ . Nous obtenons ainsi

$$\left( \frac{2\pi i\hbar(3\epsilon)}{m} \right)^{-1/2} \exp \left[ \frac{m}{2i\hbar(3\epsilon)} (x_3 - x_0)^2 \right] \quad (3.5)$$

De cette façon, un raisonnement par récurrence est établi et après  $N - 1$  étapes, nous avons

$$\left( \frac{2\pi i\hbar(n\epsilon)}{m} \right)^{-1/2} \exp \left[ \frac{m}{2i\hbar(n\epsilon)} (x_n - x_0)^2 \right] \quad (3.6)$$

Comme  $n\epsilon = t_n - t_0$ , nous obtenons bien l'équation (3.2).

## 3.2 Diffraction à travers une fente

### 3.2.1 Présentation de l'expérience

Supposons qu'une particule soit libérée à l'instant  $t = 0$  et, après un intervalle de temps  $T$ , atteigne le point  $x_0$ . Nous pouvons dire que la particule a une vitesse  $v_0 = x_0/T$ . Cela implique que si la particule avait continué pendant un autre intervalle de temps  $\tau$ , elle aurait parcouru une distance  $v_0\tau$ . En mécanique quantique, nous devons résoudre le problème suivant.

A  $t = 0$  la particule part de l'origine  $x = 0$ . Après un intervalle de temps  $T$  nous supposons que la particule se trouve dans un intervalle  $\pm b$  de  $x_0$ . Nous nous demandons quelle est la probabilité de trouver la particule à une distance  $x$  de  $x_0$  après un autre intervalle de temps  $\tau$ . L'amplitude pour arriver à la position  $x$  à l'instant  $T + \tau$  peut être considérée comme la somme des contributions de chaque trajectoire qui va de l'origine au point final, sachant que chaque trajectoire passe par l'intervalle  $\pm b$  de  $x_0$  à l'instant  $T$ . L'amplitude peut alors s'écrire à l'aide des kernels.

$$\psi(x) = \int_{-b}^b K(x + x_0, T + \tau; x_0 + y, T) K(x_0 + y, T; 0, 0) dy \quad (3.7)$$

Le premier kernel correspond à la trajectoire de la particule de l'origine à la fente et le deuxième à celle de la fente au point final. La fente a une largeur finie et le passage à travers chaque intervalle élémentaire de la fente représente un chemin possible. Nous devons donc intégrer sur toute la largeur de la fente. Toutes les particules que nous considérons sont libres et leur kernel s'écrit comme celui de l'équation (3.2). L'amplitude est alors égale à

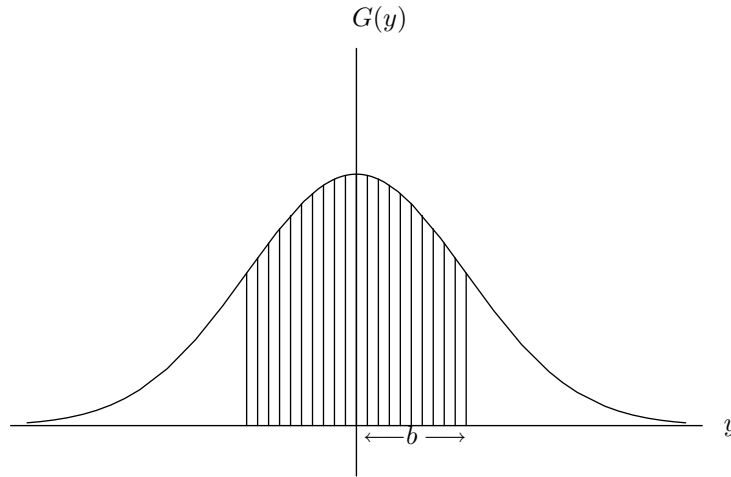
$$\psi(x) = \int_{-b}^b \left( \frac{2\pi i \hbar \tau}{m} \right)^{-1/2} \left\{ \exp \left[ \frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau} \right] \right\} \left( \frac{2\pi i \hbar T}{m} \right)^{-1/2} \left\{ \exp \left[ \frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T} \right] \right\} dy \quad (3.8)$$

### 3.2.2 La fente gaussienne

Introduisons maintenant une fonction  $G(y)$  comme facteur dans l'intégrale et supposons que ce soit une fonction gaussienne

$$G(y) = e^{-y^2/2b^2} \quad (3.9)$$

Cela simplifie le calcul de l'intégrale en permettant d'intégrer de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En effet, d'après la figure suivante qui montre la forme de la fonction, la largeur réelle de la courbe dépend du paramètre  $b$  mais deux-tiers de l'aire sous la courbe se trouvent entre  $-b$  et  $+b$ . L'intégrale de cette fonction entre  $-\infty$  et  $+\infty$  est presque égale à celle entre  $-b$  et  $b$ .



Avec une fente gaussienne l'intégrale de l'amplitude devient

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2\pi i \hbar \sqrt{\tau T}} \left\{ \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{x^2}{\tau} + \frac{x_0^2}{T} \right) + \frac{im}{\hbar} \left( -\frac{x}{\tau} + \frac{x_0}{T} \right) y + \left( \frac{im}{2\hbar\tau} + \frac{im}{2\hbar T} - \frac{1}{b^2} \right) y^2 \right] \right\} dy \quad (3.10)$$

Cette intégrale est de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\exp(\alpha x^2 + \beta x)] dx = \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}} \exp \left( -\frac{\beta^2}{4\alpha} \right) \quad (3.11)$$

L'intégrale devient alors

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}} \left[ T\tau \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} + \frac{i\hbar}{b^2 m} \right) \right]^{-1/2} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{x^2}{\tau} + \frac{x_0^2}{T} \right) - \frac{(im/\hbar)^2 (-x/\tau + x_0/T)^2}{4(im/2\hbar)(1/\tau + 1/T + i\hbar/b^2 m)} \right] \quad (3.12)$$

En prenant le module au carré de cette amplitude, nous obtenons la probabilité qu'a la particule de se trouver au point  $x$ .

### 3.3 Les intégrales de Gauss

Les intégrales de chemin ont toujours des variables au carré dans l'exponentielle : ce sont donc des intégrales de Gauss. Nous voulons déterminer l'intégrale sur tous les chemins de  $(x_a, t_a)$  à  $(x_b, t_b)$

$$K(b, a) = \int_a^b \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) \right] \mathcal{D}x(t) \quad (3.13)$$

Nous allons prendre un lagrangien le plus général possible qui est de la forme

$$L = a(t)\dot{x}^2 + b(t)\dot{x}x + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t) \quad (3.14)$$

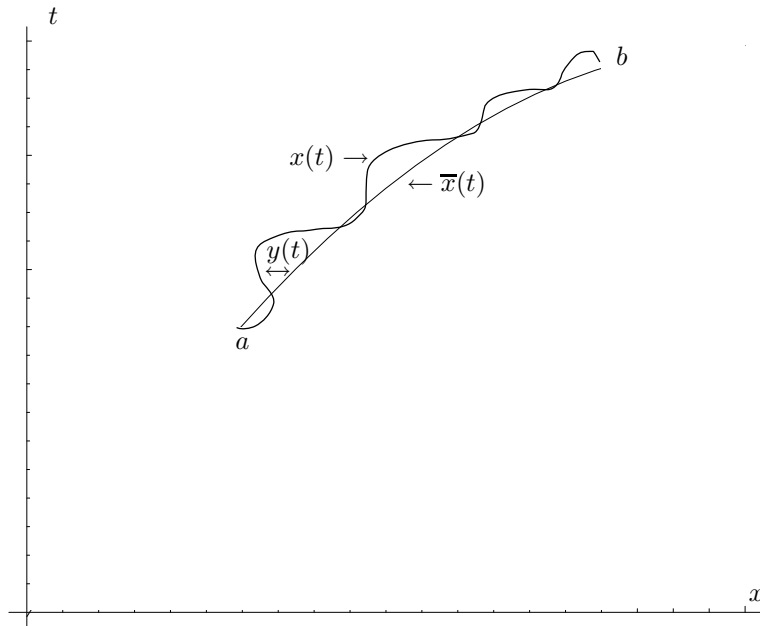
$\bar{x}(t)$  est le chemin classique entre les deux points finaux pour lequel l'action  $S$  est extrémale. Avec notre notation habituelle, nous avons

$$S_{cl}[b, a] = S[\bar{x}(t)] \quad (3.15)$$

Nous pouvons exprimer  $x$  avec  $\bar{x}(t)$  et une nouvelle variable  $y$  :

$$x = \bar{x} + y \quad (3.16)$$

Cela signifie que, au lieu de définir un point du chemin par sa coordonnée  $x$ , nous mesurons la différence  $y(t)$  de ce chemin au chemin classique, comme le montre la figure suivante



A chaque instant  $t$  les variables  $x$  et  $y$  diffèrent de  $\bar{x}(t)$ . D'où  $dx_i = dy_i$  pour chaque point  $t_i$  et, en général,  $\mathcal{D}x(t) = \mathcal{D}y(t)$ . L'intégrale de l'action peut alors s'écrire

$$S[x(t)] = S[\dot{x}(t) + y(t)] = \int_{t_a}^{t_b} [a(t)(\dot{\bar{x}}^2 + 2\dot{\bar{x}}\dot{y} + \dot{y}^2) + \dots] dt \quad (3.17)$$

En réunissant les termes qui ne dépendent pas de  $y$ , nous obtenons  $S_{cl}[b, a]$ . Si Tous les termes qui contiennent un facteur  $y$  sont réunis, l'intégrale s'annule. Nous pouvons alors écrire

$$S[x(t)] = S_{cl}[b, a] + \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{y}^2 + b(t)\dot{y}y + c(t)y^2] dt \quad (3.18)$$



L'intégrale sur tous les chemins ne dépend pas du chemin classique et donc le kernel s'écrit

$$K(b, a) = e^{(i/\hbar)S_{cl}[b,a]} \int_0^1 \left( \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{y}^2 + b(t)\dot{y}y + c(t)y^2] dt \right\} \right) \mathcal{D}y(t) \quad (3.19)$$

Comme tous les chemins  $y(t)$  partent et reviennent au point  $y = 0$ , l'intégrale de chemin peut être une fonction dépendant seulement du temps aux points extrêmes. Le kernel s'écrit alors

$$K(b, a) = e^{(i/\hbar)S_{cl}[b,a]} F(t_b, t_a) \quad (3.20)$$

De plus la fonction  $F$  dépend seulement de la différence de temps  $t_b - t_a$  et devient alors  $F(t_b - t_a)$ . En utilisant l'équation (2.23), nous trouvons

$$F(t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}} \quad (3.21)$$

### 3.4 Système à plusieurs coordonnées

Prenons une particule se déplaçant dans un espace à trois dimensions. Le chemin est défini par trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ . L'action pour une particule libre, par exemple, s'écrit alors

$$\frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} [\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2] \quad (3.22)$$

Le kernel pour aller du point initial  $(x_a, y_a, z_a)$  à l'instant  $t_a$  au point final  $(x_b, y_b, z_b)$  à l'instant  $t_b$  est

$$K(x_b, y_b, z_b, t_b; x_a, y_a, z_a, t_a) = \int_a^b \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt \right] \right\} \mathcal{D}x(t) \mathcal{D}y(t) \mathcal{D}z(t) \quad (3.23)$$

Nous pouvons couper l'intégrale en trois parties et faire le calcul pour chaque coordonnée indépendamment.

## Deuxième partie

# Étude de l'expérience des fentes d'Young



# Chapitre 4

## Résolution par l'optique physique

### 4.1 Théorie de Kirchoff de la diffraction

#### 4.1.1 Théorème de Green

Avant de présenter la théorie de la diffraction de Kirchoff (1824-1887), il nous faut introduire le théorème de Green qui se déduit du théorème d'Ostrogradsky :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{V} \, d\tau = \iint_{\Sigma} \vec{V} \vec{n}_0 \, d\Sigma \quad (4.1)$$

avec  $\vec{n}_0$  vecteur normal à la surface fermée  $\Sigma$  orienté vers l'extérieur.

Il existe toujours deux fonctions scalaires  $u$  et  $v$  telles que  $\vec{V} = v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u - u \overrightarrow{\operatorname{grad}} v$ . Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u - u \overrightarrow{\operatorname{grad}} v) &= v \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} u) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} u \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} v - u \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} v) - \overrightarrow{\operatorname{grad}} u \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} v \\ &= v \Delta u - u \Delta v \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le théorème de Green s'écrit alors

$$\iiint_V [v \Delta u - u \Delta v] \, d\tau = \iint_{\Sigma} [v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u - u \overrightarrow{\operatorname{grad}} v] \vec{n}_0 \, d\Sigma \quad (4.3)$$

#### 4.1.2 Intégrale de Kirchoff

Il est évident que, si  $u$  et  $v$  sont solutions de l'équation de Helmholtz, nous avons

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

et

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

d'où

$$\iint_{\Sigma} [v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u - u \overrightarrow{\operatorname{grad}} v] \vec{n}_0 \, d\Sigma = 0 \quad (4.4)$$

Nous posons

$$v = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4.5)$$

où  $r$  est mesurée à partir d'un point  $P$ . La fonction  $v$  présente une singularité au point  $P$  en  $r = 0$ . Puisqu'elle doit être continue et différentiable pour pouvoir appliquer le théorème de Green, le point  $P$  ne peut appartenir au domaine d'intégration. Nous excluons donc de ce dernier un volume limité par la sphère  $\Sigma'$ , centrée au point  $P$ . L'équation (4.4) devient alors

$$\iint_{\Sigma} \left[ u \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}} u \right] \vec{n}_0 \, d\Sigma + \iint_{\Sigma'} \left[ u \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}} u \right] \vec{n}_0 \, d\Sigma' = 0 \quad (4.6)$$

Développons l'intégrale correspondant à  $\Sigma'$ . Sur cette sphère, le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est dirigé vers l'origine  $P$ . Nous avons donc, comme le gradient est orienté vers l'extérieur,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \vec{n}$$

En introduisant l'angle solide  $d\Sigma = r^2 d\Omega$  mesuré en  $P$ , l'intégrale sur  $\Sigma'$  devient

$$\oiint_{\Sigma'} \left( u - ikur + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) e^{ikr} d\Omega \quad (4.7)$$

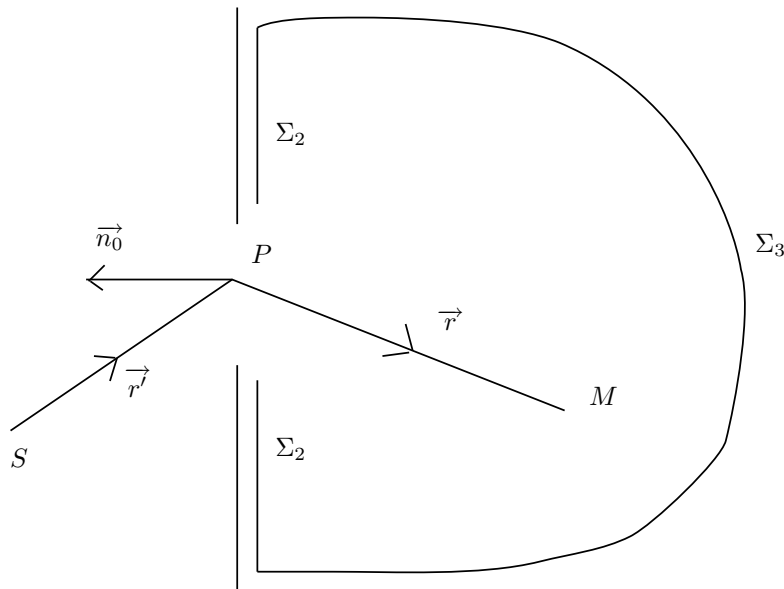
où  $\overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \vec{n}_0 d\Sigma = -(\partial u / \partial r) r^2 d\Omega$ . Nous faisons tendre  $r$  vers 0 pour l'intégrale sur  $\Sigma'$  et, comme  $u$  est continue, sa valeur en tout point de  $\Sigma'$  approche celle au point  $P$ ,  $u_P$ . Les deux derniers termes de l'équation (4.7) tendent vers 0 et l'intégrale est alors égale à  $4\pi u_P$ . L'équation (4.6) devient donc

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \left[ \oiint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}_0 d\Sigma - \oiint_{\Sigma} u \vec{\nabla} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \vec{n}_0 d\Sigma \right] \quad (4.8)$$

Ce résultat représente l'intégrale de Fresnel-Kirchoff.

### 4.1.3 Étude d'un exemple

Une onde sphérique monochromatique est issue de la source ponctuelle  $S$ . Sur le trajet de l'onde se trouve une ouverture plane, percée dans un écran opaque, et nous cherchons à déterminer l'amplitude lumineuse au point  $M$ . Nous supposons que les dimensions linéaires sont grandes devant la longueur d'onde mais faibles devant les distances  $SP$  et  $PM$  ( $P$  étant un point quelconque de l'ouverture).



Pour déterminer l'amplitude au point  $M$ , nous devons calculer l'intégrale de Fresnel-Kirchoff sur une surface fermée  $\Sigma$ , formée par l'ouverture  $\Sigma_a$ , une portion  $\Sigma_2$  du côté non-éclairé de l'écran et une portion  $\Sigma_3$  d'une sphère de centre  $M$  et de rayon  $R$  supposé assez grand. Les valeurs de  $u_{\Sigma_a}$ ,  $u_{\Sigma_2}$ ,  $u_{\Sigma_3}$  et de leurs gradients ne sont pas parfaitement connues mais nous pouvons faire plusieurs hypothèses. Nous supposons tout d'abord que  $u_{\Sigma_a}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} u_{\Sigma_a}$  ont, en tout point de  $\Sigma_a$ , les valeurs qu'elles auraient en l'absence de l'écran. Nous pouvons de la même manière supposer que ces quantités sont nulles sur  $\Sigma_2$ . Enfin nous admettons que, pour une valeur de  $R$  suffisamment grande,  $u_{\Sigma_3}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} u_{\Sigma_3}$  sont nulles.

Les conditions aux limites de Kirchoff, qui sont à la base de la théorie de la diffraction de Kirchoff, sont donc les suivantes :

1. sur l'ouverture  $\Sigma_a$

$$u_{\Sigma_a} = A \frac{\exp(ikr')}{r'} \quad (4.9)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} u_{\Sigma_a} = -A \frac{\exp(ikr')}{r'} \left( \frac{1}{r'} - ik \right) \frac{\vec{r}'}{r'} \quad (4.10)$$

où  $\vec{r}' = \overrightarrow{SP}$ .

2. sur les surfaces  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$

$$u_{\Sigma_2} = 0 \quad \overrightarrow{\text{grad}} u_{\Sigma_2} = 0 \quad (4.11)$$

$$u_{\Sigma_3} = 0 \quad \overrightarrow{\text{grad}} u_{\Sigma_3} = 0 \quad (4.12)$$

Dans ces conditions, nous avons

$$u_M = \frac{A}{4\pi} \iint_{\Sigma_a} \frac{\exp[ik(r+r')]}{rr'} \left[ \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{\vec{r}}{r} - \left( \frac{1}{r'} - ik \right) \frac{\vec{r}'}{r'} \right] \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_a \quad (4.13)$$

Les distances  $r'$  et  $r$  sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde  $k$  et nous pouvons donc négliger  $\frac{1}{r'}$  et  $\frac{1}{r}$  devant  $k$ . Nous obtenons alors la formule de Fresnel-Kirchoff :

$$u_M = \frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma_a} \frac{\exp[ik(r+r')]}{rr'} [\cos(\vec{n}_0, \vec{r}) - \cos(\vec{n}_0, \vec{r}')] d\Sigma_a \quad (4.14)$$

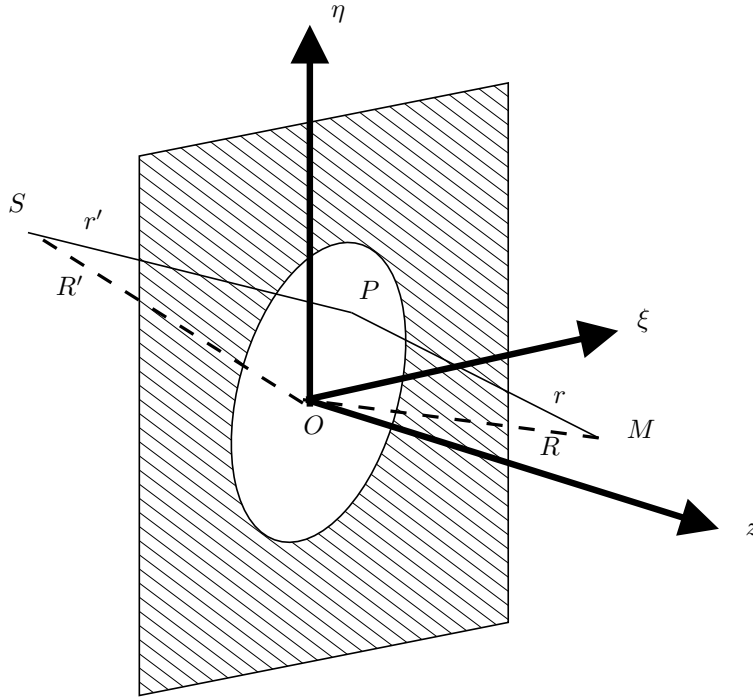
#### 4.1.4 Approximation paraxiale

Dans tout ce qui suivra, nous nous bornerons à étudier les phénomènes de diffraction dans les directions voisines de celles des ombres ou des images géométriques. Dans ces conditions, le facteur en cosinus de l'équation (4.14) varie peu d'un point à l'autre de l'ouverture et nous pouvons écrire

$$\cos(\vec{n}_0, \vec{r}) = -\cos(\vec{n}_0, \vec{r}') = \cos \gamma \quad (4.15)$$

Pour la même raison,  $r$  et  $r'$  peuvent être considérés comme constants, hormis dans l'argument de l'exponentielle. Il en résulte que

$$u_M = \frac{iA}{2\lambda rr'} \cos \gamma \iint_{\Sigma_a} \exp[ik(r+r')] d\Sigma_a \quad (4.16)$$



L'origine des coordonnées de l'espace est prise en un point  $O$  de l'ouverture. Soient  $x', y', z'$  les coordonnées de  $S$  et  $x, y, z$  celles de  $M$ . Les coordonnées du point  $P$  de l'ouverture  $\Sigma_a$  sont  $(\xi, \eta, 0)$ . Nous posons de plus  $SO = R'$  et  $OM = R$ . D'où

$$r'^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + z'^2 \quad (4.17)$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \quad (4.18)$$

Nous pouvons encore écrire

$$r'^2 = R'^2 \left[ 1 - 2 \frac{(\xi x' + \eta y')}{R'^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R'^2} \right] \quad (4.19)$$

$$r^2 = R^2 \left[ 1 - 2 \frac{(\xi x + \eta y)}{R^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2} \right] \quad (4.20)$$

où, d'après les hypothèses précédentes, les rapports

$$\frac{\xi}{R'}, \frac{\eta}{R'}, \frac{\xi}{R}, \frac{\eta}{R}, \frac{x'}{R'}, \frac{y'}{R'}, \frac{x}{R}, \frac{y}{R}$$

sont petits devant 1. Dans ces conditions, en négligeant tous les termes d'ordre supérieur à 2, nous obtenons

$$r' = R' - \frac{(\xi x' + \eta y')}{R'} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2R'} \quad (4.21)$$

$$r = R - \frac{(\xi x + \eta y)}{R} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2R} \quad (4.22)$$

L'amplitude lumineuse au point  $M$  peut alors s'écrire

$$u_M = \frac{iA}{\lambda R R'} \cos \gamma \exp[ik(R + R')] \iint_{\Sigma_a} \exp(-ik\Delta) d\xi d\eta \quad (4.23)$$

avec

$$\Delta = \xi \left( \frac{x}{R} + \frac{x'}{R'} \right) + \eta \left( \frac{y}{R} + \frac{y'}{R'} \right) - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (4.24)$$

## 4.2 Diffraction de Fraunhofer

Soient

$$l_0 = -\frac{x'}{R'} \quad m_0 = -\frac{y'}{R'} \quad (4.25)$$

et

$$l = \frac{x}{R} \quad m = \frac{y}{R} \quad (4.26)$$

Nous pouvons mettre l'expression (4.24) sous la forme

$$\Delta = (l - l_0)\xi + (m - m_0)\eta - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (4.27)$$

Comme nous sommes dans le cas de la diffraction de Fraunhofer, nous pouvons négliger le terme quadratique devant le terme du premier ordre. Dans ces conditions, l'amplitude diffractée à l'infini par l'ouverture  $\Sigma_a$  est donnée par l'expression

$$u_M = C \iint_{\Sigma_a} \exp\{-ik[(l - l_0)\xi + (m - m_0)\eta]\} d\xi d\eta \quad (4.28)$$

où  $C$  est une constante. Nous pouvons définir la transparence en amplitude de l'ouverture  $\Sigma_a$  par la fonction

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= C \text{ pour tous les points de l'ouverture} \\ &= 0 \text{ en tous les points hors de l'ouverture} \end{aligned} \quad (4.29)$$

De plus, si nous notons  $\vec{u}_0$  le vecteur directeur du rayon incident et  $\vec{u}$  celui du rayon diffracté à partir du point  $P$ , nous constatons que

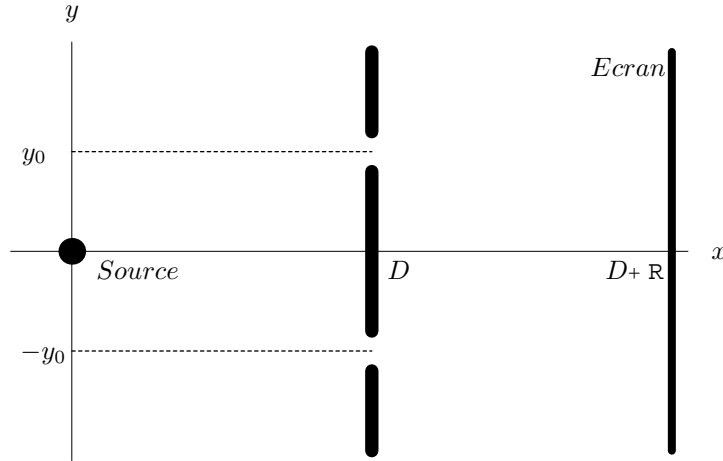
$$(l - l_0)\xi + (m - m_0)\eta = \vec{OP} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (4.30)$$

Nous pouvons donc écrire

$$u_M = C \iint_{\Sigma_a} \exp\{ik[(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}]\} d\xi d\eta \quad (4.31)$$

### 4.3 Applications aux fentes de Young

La particule met un temps  $\tau$  pour parcourir la distance qui sépare la fente de l'écran. Les fentes sont de largeur  $b$  et séparées de la distance  $a$  telle que  $2y_0 = a$ .



#### 4.3.1 Avec une fente normale

Comme les fentes sont infiniment fines, leur longueur n'intervient pas dans l'intégrale : il suffit donc d'intégrer sur la largeur des fentes. Sur la largeur des fentes, la fonction transparence vaut la constante  $C$  et 0 ailleurs. L'amplitude au point  $M$  vaut alors

$$u_M = C \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} y \sin \theta\right) dy + C \int_{-a/2-b/2}^{-a/2+b/2} \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} y \sin \theta\right) dy \quad (4.32)$$

Le calcul permet de trouver le résultat

$$u_M = C' \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi \sin \theta b}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \sin \theta b}{\lambda}} \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) \right] \quad (4.33)$$

Pour avoir l'intensité au point  $M$ , il faut prendre l'amplitude au carré du résultat précédent. Nous obtenons ainsi

$$|u_M|^2 = |C'|^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi \sin \theta b}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \sin \theta b}{\lambda}} \right]^2 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) \right] \quad (4.34)$$

En utilisant la relation de De Broglie  $p\lambda = h$ , nous pouvons calculer  $\sin \theta$  en fonction de  $y$ . Ainsi nous avons

$$\frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{my}{2\hbar\pi\tau} \quad (4.35)$$

Pour réaliser toutes les applications numériques de ce rapport, nous allons considérer que la particule est un électron. Nous avons donc les valeurs numériques suivantes

$$m = 9.1095310^{-31} \text{ kg}$$

$$v = 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a = 10^{-5} \text{ m}$$

$$b = 10^{-6} \text{ m}$$

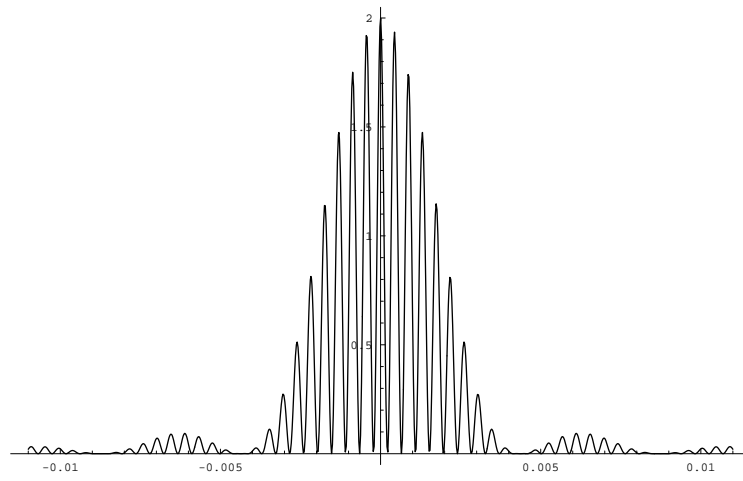
$$T = 1.16 * 10^{-6} \text{ s}$$

$$\tau = 6 * 10^6 \text{ s}$$

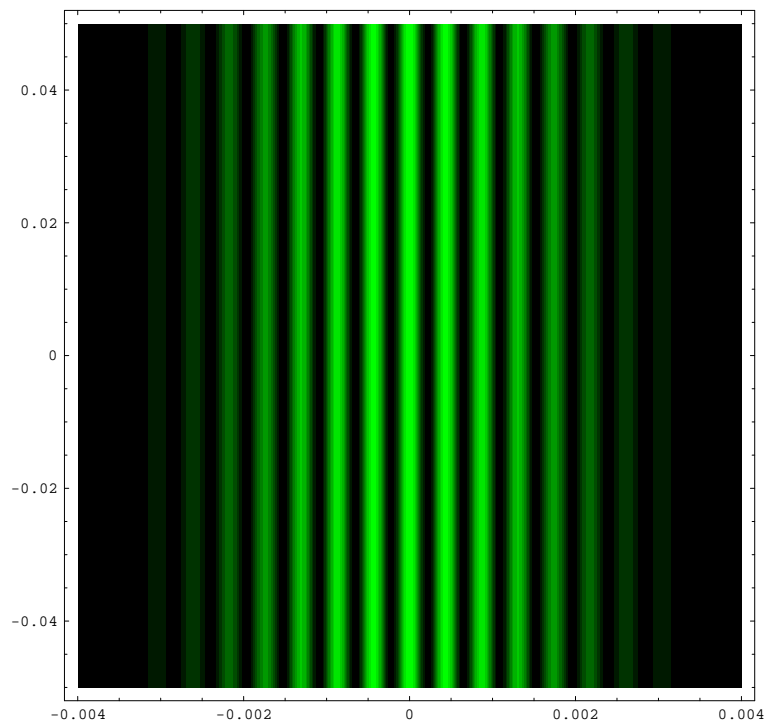
$$D = 1.16 \text{ m}$$

Nous pouvons ainsi tracer la figure de diffraction que nous obtenons avec les deux fentes infiniment longues.

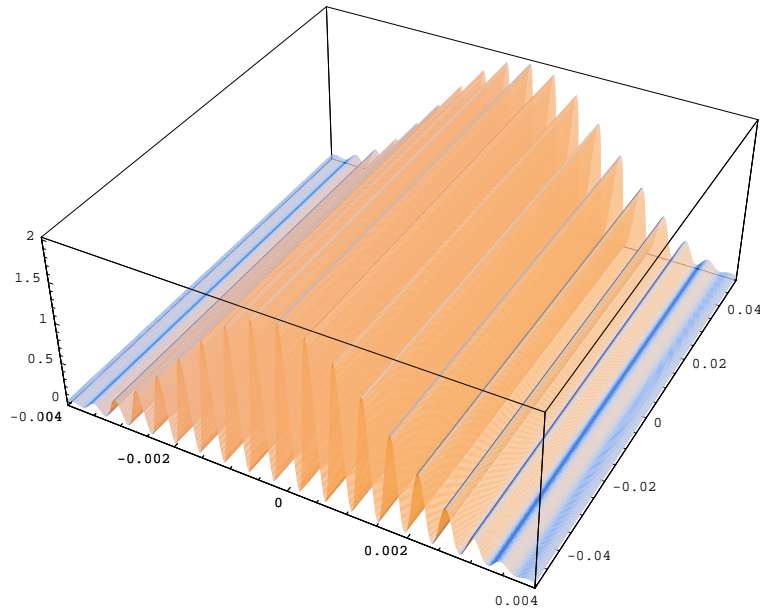




Avec l'aide du logiciel Mathematica, nous pouvons aussi visualiser les franges avec la fonction ContourPlot



et aussi l'intensité en trois dimensions



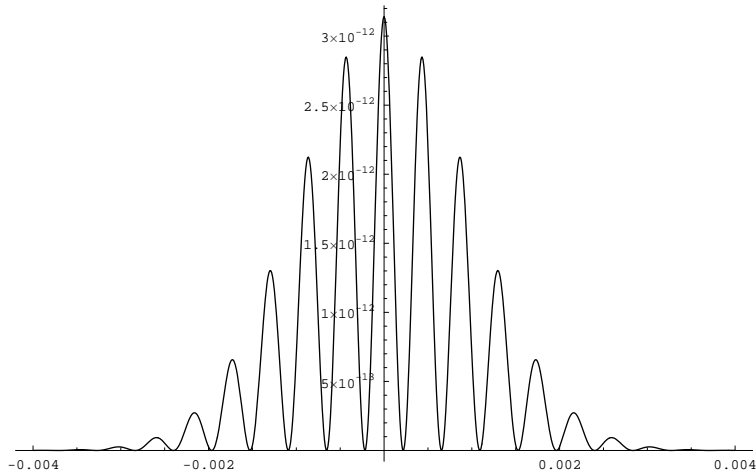
### 4.3.2 Avec une fente gaussienne

Dans ce cas la fonction transparence ne vaut plus la constante  $C$  pour les points de l'ouverture mais  $C \exp \left[ \frac{-2(y-y_0)^2}{b^2} \right]$  pour la première fente et  $C \exp \left[ \frac{-2(y+y_0)^2}{b^2} \right]$  pour la deuxième fente. De plus nous intégrons désormais de  $-\infty$  à  $\infty$ . Avec l'aide du logiciel Mathematica, nous obtenons l'amplitude au point  $M$  puis l'intensité

$$u_M = K \exp \left( \frac{-b^2 \pi^2 \sin^2 \theta}{2\lambda^2} \right) \cos \left( \frac{2\pi y_0 \sin \theta}{\lambda} \right) \quad (4.36)$$

$$|u_M|^2 = K^2 \exp \left( \frac{-b^2 \pi^2 \sin^2 \theta}{\lambda^2} \right) \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi \sin \theta a}{\lambda} \right) \right] \quad (4.37)$$

En utilisant la relation  $\frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{my}{2h\pi\tau}$ , nous pouvons tracer la figure de diffraction



Nous allons maintenant voir dans le chapitre suivant si nous obtenons les mêmes résultats avec la méthode des intégrales de chemin.



# Chapitre 5

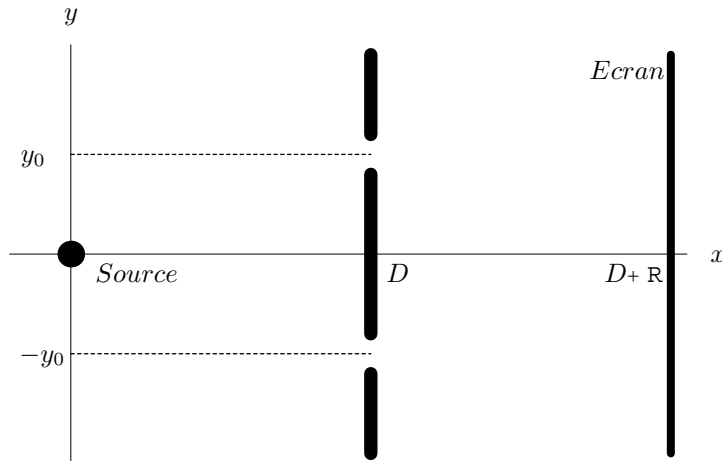
## Résolution par les intégrales de chemin

### 5.1 Définition des kernels

Pour cette expérience, nous considérons des particules libres de masse  $m$  se déplaçant dans un espace à deux dimensions. Le lagrangien d'un tel système est  $L = m/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ . L'action classique vaut alors

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \left[ \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} + \frac{(y_b - y_a)^2}{t_b - t_a} \right] \quad (5.1)$$

Les particules partent de la source pour passer par l'une des deux fentes à la position  $(D, \epsilon)$  puis atteignent l'écran au point  $(D + R, y)$ . De plus la particule met un temps  $T$  pour arriver à la première fente et un temps  $\tau$  pour parcourir la distance qui sépare la fente de l'écran. Les fentes sont de largeur  $b$  et séparées de la distance  $a$  telle que  $2y_0 = a$ .



Il existe ainsi deux types de chemins possibles : soit la particule passe par la première fente, soit elle passe par la deuxième. Nous devons donc calculer l'amplitude en deux intégrales, celles-ci différant par la valeur de  $y_0$ . Comme le chemin passe par un point précis, les intégrales de l'amplitude sont composées d'un produit de kernels. Le premier kernel représente la trajectoire de la particule de la source à la fente alors que le second celle de la fente au point  $(D + R, y)$  de l'écran. Nous devons donc intégrer sur toute la largeur d'une fente et l'amplitude  $\psi(y)$  est alors égale à

$$\psi(y) = \int_{y_0 - b/2}^{y_0 + b/2} K(D + R, y, T + \tau; D, \epsilon, T) K(D, \epsilon, T; 0, 0, 0) d\epsilon + \int_{-y_0 - b/2}^{-y_0 + b/2} K(D + R, y, T + \tau; D, \epsilon, T) K(D, \epsilon, T; 0, 0, 0) d\epsilon \quad (5.2)$$

D'après la formule des intégrales de Gauss, nous avons

$$K(D, \epsilon, T; 0, 0, 0) = \frac{m}{2\pi i \hbar T} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar T} (D^2 + \epsilon^2) \right] \quad (5.3)$$

$$K(D + R, y, T + \tau; D, \epsilon, T) = \frac{m}{2\pi i \hbar \tau} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar \tau} (R^2 + (y - \epsilon)^2) \right] \quad (5.4)$$

## 5.2 Avec une fente gaussienne

Pour simplifier le calcul, nous allons introduire dans la première intégrale la fonction  $G(\epsilon) = e^{-\frac{\epsilon^2}{b^2}(y_0+\epsilon)^2}$  et dans la seconde  $G(\epsilon) = e^{-\frac{\epsilon^2}{b^2}(-y_0+\epsilon)^2}$  ce qui va permettre d'intégrer de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Nous allons d'abord calculer la première intégrale qui correspond à la fente centrée sur  $y_0$  puis il suffira de remplacer  $y_0$  par  $-y_0$  pour trouver la seconde. À l'aide du logiciel Mathematica, nous avons

$$\text{Integrate}\left[-\frac{e^{-\frac{2(y+\epsilon)^2}{b^2} + \frac{im(R^2 T + T(y-\epsilon)^2 + (D^2 + \epsilon^2)\tau)}{2\hbar T\tau}} m^2}{4\hbar^2 \pi^2 T\tau}, \{\epsilon, -\infty, \infty\}\right]$$

$$-\frac{1}{4\hbar^2 \pi^2 T\tau} \left( m^2 \text{If}\left[\text{Im}\left[\frac{m}{\hbar T}\right] + \text{Im}\left[\frac{m}{\hbar \tau}\right] + 4\text{Re}\left[\frac{1}{b^2}\right] > 0, \right.$$

$$\frac{e^{\frac{im(4i\hbar T\tau(R^2 T + T(y+\gamma)^2 + (D^2 + \gamma^2)\tau) + \hbar^2 m(R^2 T(T+\tau) + \tau(T\gamma^2 + D^2(T+\tau))))}{2\hbar T\tau(4i\hbar T\tau + b^2 m(T+\tau))}} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{4}{b^2} - \frac{im(T+\tau)}{\hbar T\tau}}}, \right.$$

$$\left. \text{Integrate}\left[e^{-\frac{2(y+\epsilon)^2}{b^2} + \frac{im(R^2 T + T(y-\epsilon)^2 + (D^2 + \epsilon^2)\tau)}{2\hbar T\tau}}, \{\epsilon, -\infty, \infty\}, \right.$$

$$\left. \left. \text{Assumptions} \rightarrow \text{Im}\left[\frac{m}{\hbar T}\right] + \text{Im}\left[\frac{m}{\hbar \tau}\right] + 4\text{Re}\left[\frac{1}{b^2}\right] \leq 0\right] \right)$$

La première intégrale vaut donc après changement de variables

$$-\frac{m^2}{2\sqrt{2}\hbar^2\pi^{3/2}T\tau\sqrt{\frac{4}{b^2} - \frac{im(T+\tau)}{\hbar T\tau}}} \exp\left[\frac{im(4i\hbar T\tau(R^2 T + T(y+y_0)^2 + (D^2 + y_0^2)\tau) + b^2 m(R^2 T(T+\tau) + \tau(Ty^2 + D^2(T+\tau))))}{2\hbar T\tau(4i\hbar T\tau + b^2 m(T+\tau))}\right] \quad (5.5)$$

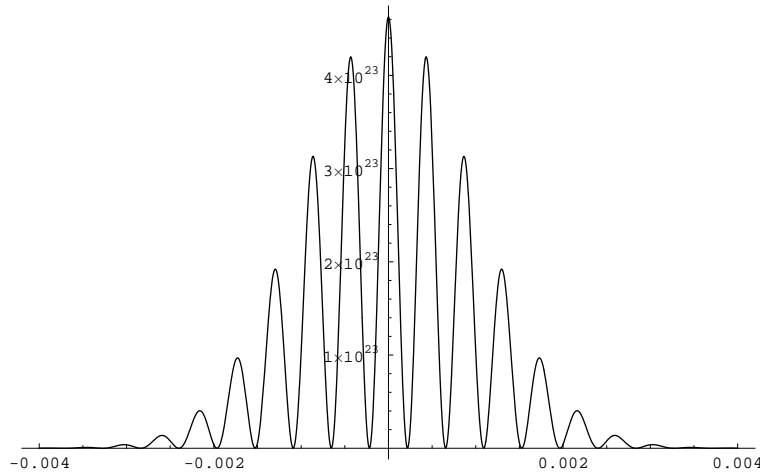
Après remplacement de  $y_0$  par  $-y_0$ , nous trouvons la deuxième intégrale

$$-\frac{m^2}{2\sqrt{2}\hbar^2\pi^{3/2}T\tau\sqrt{\frac{4}{b^2} - \frac{im(T+\tau)}{\hbar T\tau}}} \exp\left[\frac{im(4i\hbar T\tau(R^2 T + T(y-y_0)^2 + (D^2 + y_0^2)\tau) + b^2 m(R^2 T(T+\tau) + \tau(Ty^2 + D^2(T+\tau))))}{2\hbar T\tau(4i\hbar T\tau + b^2 m(T+\tau))}\right] \quad (5.6)$$

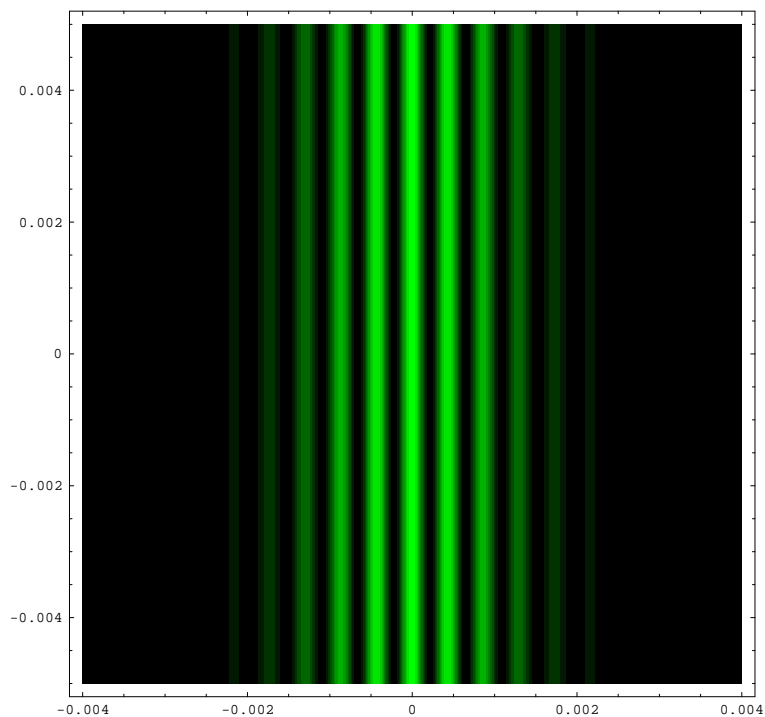
En additionnant ces deux résultats, nous avons l'amplitude et en prenant le carré du module de l'amplitude, nous pouvons calculer la probabilité de présence de la particule au point  $(D+R, y)$ . Il faut aussi remplacer  $y_0$  par sa valeur  $a/2$ . Avec l'aide du logiciel Mathematica, ce calcul peut se faire sans devoir perdre des constantes et nous obtenons, après plusieurs simplifications grâce aux fonctions Simplify, ExpToTrig ou encore ComplexExpand, le résultat suivant

$$|\psi(y)|^2 = \frac{m^4}{4\hbar^4\pi^3 T^2 \tau^2 \sqrt{\frac{16}{b^4} + \frac{m^2(T+\tau)^2}{\hbar^2 T^2 \tau^2}}} e^{-\frac{b^2 m^2 (4T^2 y^2 + a^2 (T+\tau)^2)}{16\hbar^2 T^2 \tau^2 + b^4 m^2 (T+\tau)^2}} \times \left[ \cos\left(\frac{16a\hbar m T^2 \tau y}{16\hbar^2 T^2 \tau^2 + b^4 m^2 (T+\tau)^2}\right) + \cosh\left(\frac{4ab^2 m^2 T y (T+\tau)}{16\hbar^2 T^2 \tau^2 + b^4 m^2 (T+\tau)^2}\right) \right] \quad (5.7)$$

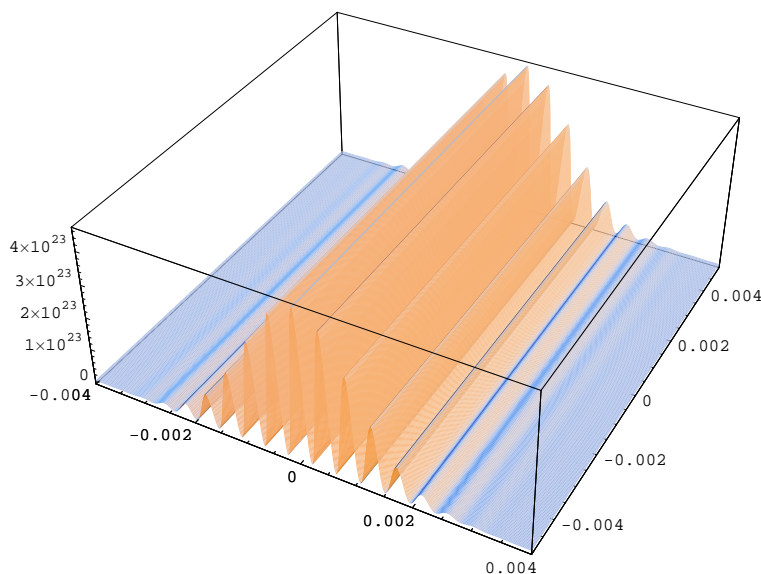
Avec la fonction Plot du logiciel Mathematica, nous pouvons tracer la probabilité de présence de la particule en fonction de sa position  $y$ .



Sur ce graphe apparaît très bien le phénomène d'interférences associé à la diffraction. Le terme en exponentielle correspond à la diffraction d'une particule par une fente alors que celui en  $\cos + \cosh$  correspond aux interférences. En effet pour des valeurs de  $y$  autour de 0,  $\cosh$  est constant autour de 1. Avec la fonction `ContourPlot` du logiciel Mathematica, nous pouvons créer la figure de diffraction que l'on observerait avec de la lumière monochromatique.



Pour le plaisir nous pouvons visualiser les franges d'interférence en trois dimensions avec Mathematica

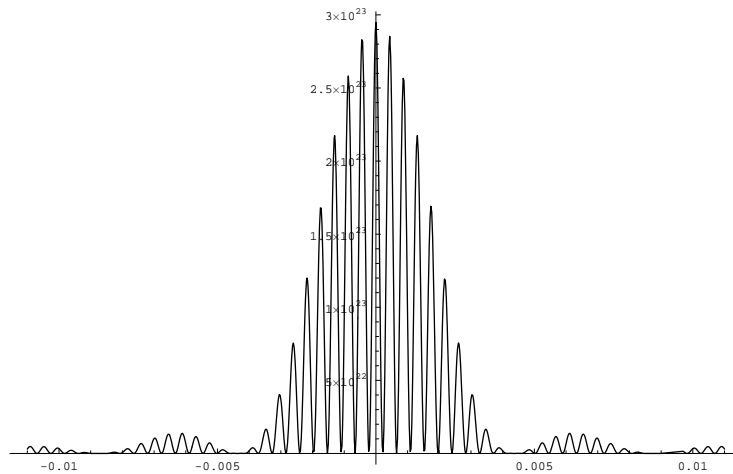


### 5.3 Avec une fente normale

Avec une fente normale, nous intégrons directement le produit de kernels de  $y_0 - b/2$  à  $y_0 + b/2$  pour la première fente et de  $-y_0 - b/2$  à  $-y_0 + b/2$  pour la seconde. Cela complique les calculs qui ne peuvent être faits qu'avec l'aide du logiciel Mathematica. Il faut calculer les deux intégrales puis prendre la valeur absolue au carré de l'amplitude. Nous obtenons ainsi

$$\left( m^3 \text{Abs} \left[ \text{Erfi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) (T (Y - \gamma) - \gamma \tau)}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] + \text{Erfi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) (-T Y + T \gamma + \gamma \tau)}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] + \right. \\
\left. \text{Erfi} \left[ -\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) (T (Y + \gamma) + \gamma \tau)}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] + \text{Erfi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) (T (Y + \gamma) + \gamma \tau)}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] - \right. \\
\left. \text{Erfi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) (2 T (Y - \gamma) - 2 \gamma \tau + b (T + \tau))}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] - \right. \\
\left. \text{Erfi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) (-2 T Y + 2 T \gamma + 2 \gamma \tau + b (T + \tau))}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] - \right. \\
\left. \text{Erfi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) (2 T (Y + \gamma) + 2 \gamma \tau + b (T + \tau))}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] - \text{Erfi} \left[ \right. \right. \\
\left. \left. \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) (b (T + \tau) - 2 (T (Y + \gamma) + \gamma \tau))}{\sqrt{\frac{h T \tau (T + \tau)}{m}}} \right] \right]^2 \right) / (32 h^3 \text{Pi}^3 T \tau (T + \tau))$$

Pour tracer cette fonction, nous utilisons encore Mathematica et nous avons ainsi



## 5.4 Conclusion

Nous remarquons que, pour chaque fente particulière, la méthode de la théorie de Kirchoff et celle des intégrales de chemin permettent d'obtenir les mêmes graphes. Les deux méthodes sont donc équivalentes. Toutefois le calcul des intégrales de chemin est, selon moi, bien plus intuitif que le calcul vectoriel utilisé dans l'optique physique. Il est facile d'imaginer la particule partant de la source pour aller à un point d'une des deux fentes puis sur l'écran et ensuite d'intégrer sur tous les chemins possibles.

Troisième partie

**L'interprétation de la mécanique  
quantique de Bohm**





# Chapitre 6

## Présentation de la théorie de Bohm

### 6.1 Introduction

L'interprétation habituelle de la théorie quantique est basée sur le principe d'incertitude qui peut être déduit de deux manières. Premièrement nous pouvons partir de la supposition que la fonction d'onde détermine seulement les probabilités des résultats d'une expérience mais donne néanmoins la description la plus complète possible de l'état quantique d'un système. Avec l'aide de cette supposition et de la relation de De Broglie,  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde associée à la fonction d'onde, nous pouvons en déduire le principe d'incertitude. Cette démonstration est réalisée par A. Messiah dans son livre [5]. De cette manière, le principe d'incertitude est interprété comme une limite pour connaître simultanément avec précision la quantité de mouvement et la position comme quantités définies.

La deuxième manière de déduire le principe d'incertitude s'obtient à partir d'une analyse théorique des méthodes utilisées pour mesurer des quantités physiques telles que la quantité de mouvement et la position. Nous remarquons ainsi que le dispositif de mesure interagit avec le système observé provoquant des perturbations des propriétés observées du système. Si nous pouvions contrôler les effets de ces perturbations, alors nous pourrions les corriger et obtenir simultanément les mesures de la quantité de mouvement et de la position. Mais alors le principe d'incertitude, qui est une conséquence de la supposition de la fonction d'onde, serait violé. Pour éviter cette contradiction, Bohr et d'autres scientifiques ont suggéré une autre supposition qui déclare que les perturbations entre le dispositif et le système observé sont imprévisibles et incontrôlables. Ce point de vue sera énoncé par Bohr dans le principe de complémentarité qui utilise la notion de paires complémentaires, telles que quantité de mouvement et position, particule et onde. Le degré maximum de précision d'un des membres d'une paire est inversement lié à celui de l'autre membre.

L'interprétation habituelle de la théorie quantique peut être critiquée de différentes façons. Toutefois Bohm insista principalement sur le fait qu'il était possible de connaître précisément le comportement d'un système. L'interprétation habituelle est logique mais elle n'exclut pas la possibilité d'autres interprétations qui incluraient d'autres paramètres permettant de déterminer l'état quantique précisément. Du point de vue de l'interprétation habituelle, ces paramètres supplémentaires peuvent être appelés variables "cachées". Peut-être que les phénomènes de la mécanique quantique sont des manifestations de variables cachées qui n'ont pas encore été détectées directement.

### 6.2 Nouvelle interprétation de l'équation de Schrödinger

Nous allons développer dans cette partie l'interprétation physique que fit Bohm de la mécanique quantique. Partons d'abord de l'équation de Schrödinger pour une particule :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\hbar^2/2m)\nabla^2\psi + V(x)\psi \quad (6.1)$$

Comme  $\psi$  est une fonction complexe, nous pouvons écrire

$$\psi = R \exp(iS/\hbar) \quad (6.2)$$

où  $R$  et  $S$  sont réels. Nous vérifions facilement que

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}[R\nabla^2 S + 2\vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S] \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left[ \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] \quad (6.4)$$

Il est plus commode d'écrire  $P(x) = R^2(x)$  où  $P(x)$  est la densité de probabilité de présence. Nous obtenons alors

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( P \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\vec{\nabla} P)^2}{P^2} \right] = 0 \quad (6.6)$$

Dans la limite de la mécanique classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ), les équations précédentes s'interprètent très facilement. La fonction  $S(x)$  est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi et  $\nabla S(x)/m$  est alors égale au vecteur vitesse  $\vec{v}(x)$  pour une particule passant au point  $x$ . L'équation (6.5) peut alors s'exprimer de la manière suivante

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (P \vec{v}) = 0 \quad (6.7)$$

Cette équation représente la conservation de la densité de probabilité.

Nous allons maintenant voir que cette interprétation peut être donnée même quand  $\hbar \neq 0$ . Nous supposons ainsi que chaque particule n'a pas seulement une énergie potentielle classique  $V(x)$  mais aussi une énergie potentielle quantique

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\vec{\nabla} P)^2}{P^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (6.8)$$

L'équation (6.6) peut être considérée comme l'équation de Hamilton-Jacobi pour notre ensemble de particules,  $\nabla S(x)/m$  comme la vitesse d'une particule et l'équation (6.5) comme la conservation de la densité de probabilité. Nous avons ainsi le début d'une autre interprétation de l'équation de Schrödinger.

La première étape est d'associer à chaque électron une particule ayant une position et une quantité de mouvement précisément définies. La solution de l'équation de Hamilton-Jacobi modifiée (6.4) définit un ensemble de trajectoires possibles pour cette particule qui peut être obtenu à partir de la fonction de Hamilton-Jacobi  $S(x)$  en intégrant la vitesse  $\vec{v}(x) = \vec{\nabla} S(x)/m$ . La particule se déplace sous l'action d'une force qui ne dérive pas seulement de l'énergie potentielle classique  $V(x)$  mais aussi de l'énergie potentielle quantique  $U(x) = (-\hbar^2/2m)\nabla^2 R/R$ . La fonction  $R(x)$  n'est pas complètement arbitraire puisqu'elle est partiellement déterminée par  $S(x)$  avec l'équation différentielle (6.3). La façon la plus commode d'obtenir  $R$  et  $S$  est de résoudre l'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde  $\psi$  et d'utiliser les relations

$$\psi = U + iW = R[\cos(S/\hbar) + i \sin(S/\hbar)]$$

$$R^2 = U^2 + W^2 \qquad S = \hbar \tan^{-1}(W/U)$$

Comme la force agissant sur la particule dépend du module  $R(x)$  de la fonction d'onde  $\psi(x)$ , nous pouvons considérer la fonction d'onde d'un électron comme la représentation mathématique d'un champ réel. Ce champ exerce une force sur la particule d'une manière analogue au champ électromagnétique qui exerce une force sur une charge. L'analogie avec le champ électromagnétique peut être poussée plus loin. De la même manière que le champ électromagnétique obéit aux équations de Maxwell, le champ  $\psi$  obéit à l'équation de Schrödinger. Dans les deux cas, une description complète des champs à un instant donné à chaque point de l'espace détermine les valeurs des champs tout le temps. Si nous connaissons la fonction du champ, nous pouvons calculer la force agissant sur la particule et, si nous connaissons la position et la quantité de mouvement initiales, nous pouvons calculer la trajectoire entière.

Nous pouvons utiliser directement la loi du mouvement de Newton avec les bonnes conditions initiales pour résoudre le problème. L'équation du mouvement d'une particule avec une énergie potentielle classique et une énergie potentielle quantique est

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \left\{ V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right\} \quad (6.9)$$

Considérons maintenant la signification de la supposition d'un ensemble statistique de particules avec une densité de probabilité de présence égale à  $P(x) = R^2(x) = |\psi(x)|^2$ . Dans l'interprétation habituelle, la nécessité d'une description probabiliste est considérée comme inhérente à la structure du problème. Au contraire, dans l'interprétation de Bohm,

l'utilisation d'un ensemble statistique est seulement une nécessité pratique due à l'impossibilité de connaître les conditions initiales caractérisant la trajectoire suivie par la particule. Nous pouvons conclure notre présentation de l'interprétation de la mécanique quantique de Bohm en résumant les trois suppositions qu'il fait :

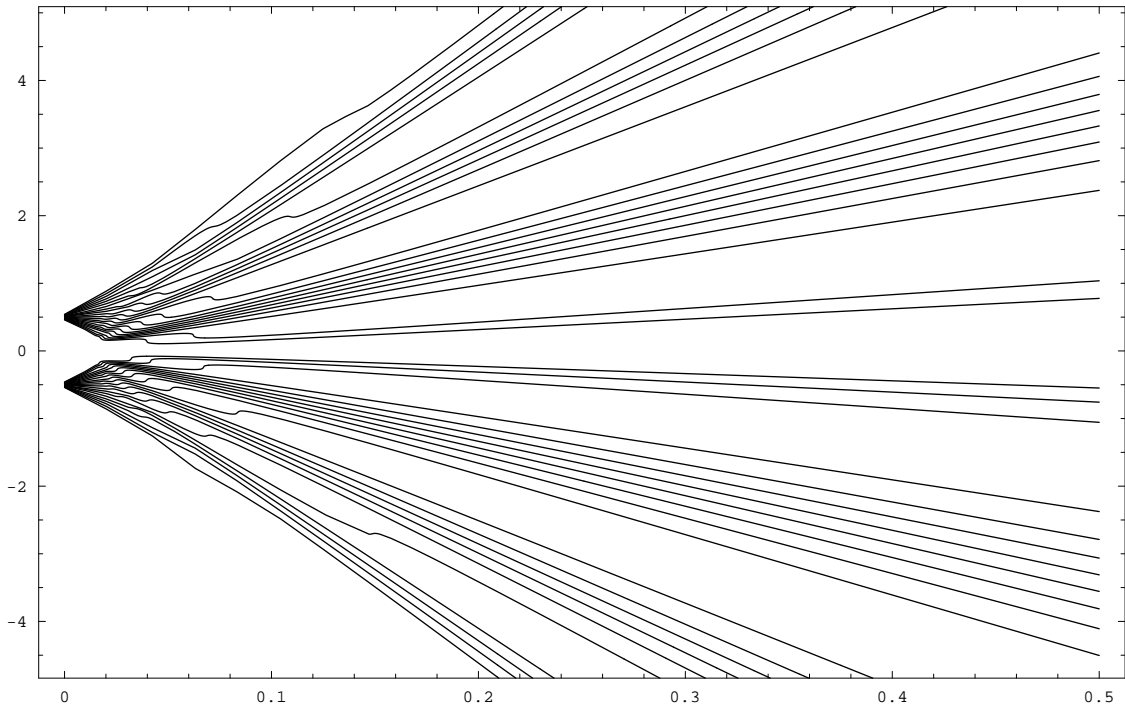
1. Le champ  $\psi$  vérifie l'équation de Schrödinger.
2. La quantité de mouvement de la particule est égale à  $\vec{p} = \vec{\nabla}S(x)$ .
3. Nous ne pouvons prévoir ou contrôler la localisation précise de la particule mais avons en pratique un ensemble statistique avec une probabilité de présence  $P(x) = |\psi(x)|^2$ . L'utilisation des statistiques est due à notre ignorance des conditions initiales précises de la particule.

### 6.3 Application aux fentes de Young

Le but de cette partie est de déterminer les trajectoires des particules après qu'elles aient traversé les fentes à l'aide de l'équation du mouvement de Newton. Pour cela nous considérons la fonction d'onde que nous avons obtenue pour une fente gaussienne avec la méthode des intégrales de chemin.

$$|\psi(y)|^2 = \frac{m^4}{4\hbar^4\pi^3T^2\tau^2\sqrt{\frac{16}{b^4} + \frac{m^2(T+\tau)^2}{\hbar^2T^2\tau^2}}} e^{-\frac{b^2m^2(4T^2y^2+a^2(T+\tau)^2)}{16\hbar^2T^2\tau^2+b^4m^2(T+\tau)^2}} \times \left[ \cos\left(\frac{16a\hbar mT^2\tau y}{16\hbar^2T^2\tau^2 + b^4m^2(T+\tau)^2}\right) + \cosh\left(\frac{4ab^2m^2Ty(T+\tau)}{16\hbar^2T^2\tau^2 + b^4m^2(T+\tau)^2}\right) \right] \quad (6.10)$$

Dans cette équation, le temps  $\tau$  représente le temps mis par la particule pour parcourir la distance entre un point quelconque de la fente et un point de coordonnées  $(x, y)$ . Cette fonction d'onde permet de calculer la fonction  $R(x)$  et donc l'énergie potentielle quantique  $U(x)$ . Nous obtenons ainsi une équation différentielle que nous allons résoudre numériquement avec l'aide du logiciel Mathematica. Nous pouvons ensuite tracer les fonctions obtenues qui représentent les trajectoires possibles de la particule après passage par l'une des deux fentes.



Nous voyons ainsi la formation de franges qui correspondent à celles observées par l'expérience et calculées par la méthode des intégrales de chemin. La nouvelle interprétation de la mécanique quantique par Bohm permet donc d'obtenir les mêmes résultats que l'interprétation habituelle.



# Bilan du stage

Ce stage m'aura permis d'avoir un premier contact avec le milieu de la recherche et de me familiariser avec le travail de chercheur. J'ai ainsi appris à utiliser le logiciel Mathematica et à manipuler le traitement de texte scientifique Latex pour pouvoir écrire ce rapport. Ce stage aura été de tous points de vue bénéfique pour mon orientation future.



# Bibliographie

- [1] A.-M. CAZABAT et M. MAY, *Optique*, Dunod, 1996
- [2] M. BORN et E. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1980 (sixième édition)
- [3] E. HECHT, *Optics*, Addison-Wesley, 1987 (deuxième édition)
- [4] R.P. FEYNMAN et A.R. HIBBS, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965
- [5] A. MESSIAH, *Mécanique quantique*, Dunod, 2003 (deuxième édition)
- [6] D. BOHM, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables*, Physical Review volume 85 numéro 2, 15 Janvier 1952